Definition: Grammatik

Eine Grammatik ist ein Tupel G = (N, T, S, P) mit den folgenden Bestandteilen:

Symbol	*Erläuterung*	*Beispiel*
N	Menge von **Nichtterminalsymbolen** d.h. Symbole, die durch andere Nichtterminalsymbole und/oder Terminalsymbole ersetzt werden	N = { <Satz>, <Subjekt>, … }
T	Menge von **Terminalsymbolen** d.h. Symbole, aus denen die Wörter der von der Grammatik erzeugten Sprache bestehen	T = { der, die, das, Hund, … }
$S \in N$	Ein Startsymbol aus der Menge der Nichtterminale	S = <Satz>
P	Menge von **Produktionsregeln**	<Satz> → <Subjekt> <Prädikat>

Reguläre Grammatiken

Bei regulären Grammatiken verwenden wir in der Regel Großbuchstaben für Nichtterminale und Kleinbuchstaben für Terminale.

Eine „reguläre Grammatik“ darf nur bestimmte, einfache Produktionsregeln enthalten:

$A \rightarrow bC$ oder $D \rightarrow e$ oder $F \rightarrow \varepsilon$

(A, C, D, F sind Nichtterminale, b und e Terminale, $F \rightarrow \varepsilon$ ersetzt F durch nichts).
D.h. jedes Nichtterminal wird ersetzt durch genau ein Terminalsymbol und optional ein weiteres Nichtterminalsymbol. So kann in jedem Ableitungsschritt nur ein weiterer Buchstabe des abzuleitenden Wortes hinzukommen.

Die Sprachen, die sich mit regulären Grammatiken erzeugen lassen, heißen „**reguläre Sprachen**“. Sie entsprechen genau den Sprachen, die sich mit endlichen Automaten prüfen lassen.

Linkslineare und rechtslineare Grammatiken

Es gibt zwei Varianten von regulären Grammatiken – je nachdem ob man das Wort vom ersten bis zum letzten Buchstaben aufbaut oder umgekehrt.
Eine reguläre Grammatik muss entweder links- oder rechtslinear sein.

- Rechtslineare Grammatiken:
  Das Wort wird vom Anfang zum Ende aufgebaut (der Normalfall).
  Die Produktionsregeln haben die Form $A \rightarrow bC$.
- Linkslineare Grammatiken:
  Das Wort wird vom Ende zum Anfang aufgebaut.
  Die Produktionsregeln haben die Form $A \rightarrow Cb$.
  Welchen praktischen Nutzen linkslineare Grammatiken haben, ist fraglich, sie gehören jedoch zu den Anforderungen des Zentralabiturs.

Aufgabe 1

a) Gegeben ist folgende reguläre (rechtslineare) Grammatik:
T = { a, b} (Terminalsymbole)
N = { S, A, B} (Nichtterminalsymbole)
S = S (Startsymbol)
P = { $S \rightarrow aA$, (Produktionsregeln)
$A \rightarrow aA \mid bB \mid b$,
$B \rightarrow aA \mid bB \mid b$ }

Prüfe durch Angabe einer Ableitungsfolge oder eines Ableitungsbaumes, ob das Wort „ababb“ aus dem Startsymbol abgeleitet werden kann.
Gib dann mindestens drei Wörter an, die sich mit den Produktionsregeln aus dem Startsymbol S herleiten lassen.
Beschreibe anschließend die Struktur der Wörter, die durch die Grammatik erzeugt werden.

b) Gegeben ist folgende reguläre (rechtslineare) Grammatik:
T = { a, h, l, o, ? }
N = { S, A, B, C, D, E }
S = S
P = { $S \rightarrow hA$, (1)
$A \rightarrow aB$, (2)
$B \rightarrow lC$, (3)
$C \rightarrow lD$, (4)
$D \rightarrow oE$, (5)
$E \rightarrow hA$, (6)
$E \rightarrow ?$ (7)

Gib zwei Wörter an, die sich mit den Produktionsregeln aus dem Startsymbol S herleiten lassen.
Beschreibe die Struktur der Wörter, die durch die Grammatik erzeugt werden können.
Wie ändert sich die Struktur der Wörter, wenn die Regel (6) entfernt wird?

Aufgabe 2

Entwickle je eine reguläre Grammatik, mit der man die folgenden Sprachen erzeugen kann:

a) L(G) = { w | w beginnt mit aa und endet mit bb }

b) $L(G) = \{ a^m b^n \mid m, n \in N$, m gerade, n ungerade $\}$ Hinweis: mind. 2 a und 1 b

c) $L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid$ w enthält die Kombination abba $\}$

d) $L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid$ w enthält mindestens 3 a's **und** mindestens 2 b's $\}$

Tipp: zu c) und d) nimm den entsprechenden endlichen Automaten zur Hilfe.