

**Definition**

Eine „kontextfreie Grammatik“ darf nur bestimmte Produktionsregeln enthalten:

$$A \rightarrow w, \text{ mit } A \in N \text{ und } w \in (T \cup N)^+.$$

Außerdem ist die Regel  $S \rightarrow \varepsilon$  zulässig, wenn  $S$  nie auf der rechten Seite einer Produktion auftritt.

Das bedeutet: auf der linken Seite einer Produktion steht immer genau ein Nichtterminal.  
Auf der rechten Seite kann eine beliebige Folge von Terminalen und Nichtterminalen stehen (mindestens jedoch ein Symbol), mit der Ausnahme  $S \rightarrow \varepsilon$ .

Im Unterschied zu regulären Grammatiken sind also z.B. Regeln möglich wie

$$A \rightarrow bCdEFgh$$

**Beispiel 1: „einfache deutsche Sätze“**

Die Grammatik aus dem AB zum Einstieg zu diesem Thema ist kontextfrei, da auf der linken Seite je ein Nichtterminal steht, auf der rechten Seite zum Teil mehrere Nichtterminale:

<Satz>	→	<Subjekt> <Prädikat> <Objekt>
<Subjekt>	→	<Artikel> <Substantiv>
<Objekt>	→	<Artikel> <Substantiv>
<Artikel>	→	der   die   das
<Substantiv>	→	Hund   Katze   Maus
<Prädikat>	→	beißt   verfolgt   erschreckt   jagt   sieht

**Beispiel 2: Grammatik, die  $\{ a^n b^n \}$  erzeugt**

Die Menge aller Wörter, die gleich viele a's und b's hintereinander enthält, lässt sich nicht durch eine reguläre Grammatik beschreiben, bzw. nicht von einem DEA erkennen, da DEA's nicht beliebig weit zählen können.

Mit der folgenden kontextfreien Grammatik kann man die Sprache erzeugen:

$$N = \{ S \} \quad T = \{ a, b \}$$

$$P = \{ S \rightarrow aSb \mid ab \}$$

Mit diesen Produktionen lassen sich beliebig lange Wörter mit gleich vielen a's und b's ableiten:

$$S \rightarrow aSb \rightarrow aaSbb \rightarrow aaaSbbb \rightarrow \dots \rightarrow aaaaaabbbsbbbbb$$

**Beispiel 3: Programmiersprachen**

Die Grammatiken von Programmiersprachen sind in der Regel kontextfrei, d.h. sie haben auf der linken Seite der Produktionsregeln immer genau ein Nichtterminal.

**Begriffe „kontextfrei“ und „kontextsensitiv“**

Der Begriff kontextfrei bedeutet, dass das Nichtterminal auf der linken Seite immer auf die gleiche Art ersetzt wird, unabhängig vom Kontext. Mit „Kontext“ ist hier gemeint, welche Zeichen vor bzw. nach dem Nichtterminal stehen.

Ein Beispiel für eine nicht-kontextfreie Grammatik ist eine kontextsensitive Grammatik:

$$P = \{ \begin{array}{l} xyAz \rightarrow xyxyBxz \\ zzAx \rightarrow zzAByyx \end{array} \}$$

In diesem (nicht weiter sinnvollen) Beispiel wird das Symbol A abhängig vom Kontext ersetzt:  
Falls vor A xy und dahinter z steht, wird A ersetzt durch xyBx.  
Falls vor A zz und hinterher x steht, wird A ersetzt durch AByy.

**Aufgabe 1**

Gegeben sei die folgende kontextfreie Grammatik  $G = (T, N, S, P)$  mit  
 $T = \{ a, b \}$ ,  $N = \{ S \}$ ,  $S = S$ ,  $P = \{ S \rightarrow a \mid b \mid SS \}$

- Begründe, dass die Grammatik nicht regulär ist.
- Zeige, dass die von der Grammatik erzeugte Sprache jedoch regulär ist.

**Aufgabe 2**

- Entwirf eine Grammatik, die wohlgeformte Klammerpaare erzeugt.  
„Wohlgeformt“ bedeutet, dass es zu jeder öffnenden eine schließende Klammer gibt, und die Klammern in der richtigen Reihenfolge öffnen bzw. schließen.  
Beispiele:  $()$  oder  $((()())())$  oder  $(((((())((())))))(())()$   
Beispiel für Wörter, die nicht in der Sprache enthalten sind:  $)()()$  oder  $()()$
- Begründe, warum es keine äquivalente reguläre Grammatik gibt.

**Aufgabe 3**

Gegeben ist die Grammatik  $G = (T, N, S, P)$  mit  $T = \{ a, b \}$ ,  $N = \{ S \}$ ,  $S = S$  und  
 $P = \{ S \rightarrow aSb \mid bSa \mid SS \mid ab \mid ba \}$

- Beschreibe, welche Worte die Sprache  $L(G)$  umfasst.  
Begründe damit, warum es keine äquivalente reguläre Grammatik geben kann.
- Gib für das Wort ababab mindestens drei verschiedene Ableitungen an.
- Begründe per Ableitung, welche der folgenden Worte in der Sprache  $L(G)$  enthalten sind:  
aabbba, abbbba, bbbaaa

**Aufgabe 4**

Die Sprache der „dualen Palindrome“ besteht aus Binärzahlen, welche vorwärts und rückwärts gelesen die gleiche Zahl ergeben. Beispiele sind 11 oder 101 oder 001100 oder 0110110

- Entwirf eine Grammatik, die diese Sprache erzeugt.
- Begründe, warum die Grammatik nicht regulär sein kann.